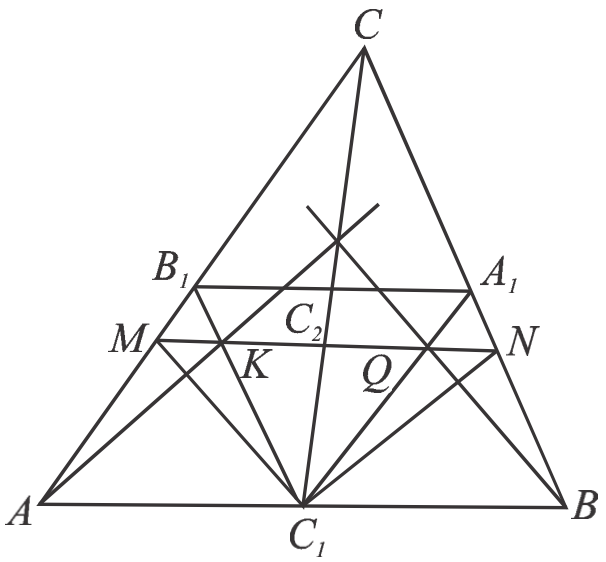
1. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის AB, BC და AC გვერდების შუაწერტილებია შესაბამისად C_1, A_1 და B_1 წერტილები. ვთქვათ M არის ისეთი წერტილი AC გვერდზე, რომ C_1M არის ACC_1 სამკუთხედის ბისექტრისა, ხოლო N არის ისეთი წერტილი BC გვერდზე, რომ C_1N არის BCC_1 სამკუთხედის ბისექტრისა. C_1B_1 და MN წრფეები იკვეთება K წერტილში, ხოლო A_1C_1 და MN წრფეები იკვეთება Q წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ AK, BQ და CC_1 წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში.

ამოხსნა



გვაქვს $\frac{CM}{MA}=\frac{CC_1}{C_1A}=\frac{CC_1}{C_1B}=\frac{CN}{NB}$, მაშასადამე $MN \parallel AB$. ამავე დროს $B_1A_1 \parallel AB$, ე. ი. $B_1A_1 \parallel MN \parallel AB$. მაშინ გვექნება: $\frac{MK}{AC_1}=\frac{B_1K}{B_1C_1}=\frac{A_1Q}{A_1C_1}=\frac{QN}{C_1B}$, საიდანაც ვიღებთ, რომ $MK=QN$.

ვთქვათ C_2 არის MN და CC_1 წრფეების გადაკვეთის წერტილი. რადგანაც $MN \parallel AB$ და CC_1 არის მედიანა, ამიტომ $MC_2=C_2N$. მაშინ $KC_2=MC_2-MK=NC_2-NQ=C_2Q$. ამრიგად $AKQB$ ტრაპეციაში C_1C_2 არის ტრაპეციის ფუძეების შუაწერტილებზე გამავალი წრფე, ხოლო AK და BQ ფერდების შემცველი წრფეებია, ამიტომ AK, BQ და CC_1 წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში. დამტკიცება დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB}$;

ბ) დაადგინა, რომ $MN \parallel AB$;

გ) დაადგინა, რომ $\frac{MK}{AC_1} = \frac{B_1K}{B_1C_1}$;

დ) დაადგინა, რომ $MK = QN$;

ე) დაადგინა, რომ $KC_2 = C_2Q$;

ვ) აღნიშნა,რომ $AKQB$ ტრაპეციაში C_1C_2 არის ტრაპეციის ფუძეების შუაწერტილებზე გამავალი წრფე;

ზ) დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა) , ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

2. ვთქვათ $Z_{>0}$ არის ყველა დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე. იპოვეთ ყველა ფუნქცია $f: Z_{>0} \to Z_{>0}$ ისეთი, რომ

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

ყოველი მთელი დადებითი m და n რიცხვებისთვის.

ამოხსნა

თუ $m = f(n)$ მაშინ გვაქვს $f(n)(f(n)+1) \mid f(n)f\big(f(n)\big) + n$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $f(n) \mid n$. ე. ი.

$$f(n) \le n, \quad \text{ყოველი } n \in Z_{>0} \qquad (1).$$

თუ $m = n$ მაშინ $n^2 + f(n) \mid nf(n) + n$, ანუ $nf(n) + n \ge n^2 + f(n)$ და ვღებულობთ $(n-1)(f(n)-n) \ge 0$. ამრიგად $f(n) \ge n$ ყოველი $n \ge 2$. ასევე ცხადია $f(1) \ge 1$ ანუ

$$f(n) \ge n, \quad \text{ყოველი } n \in Z_{>0} \qquad (2).$$

(1) და (2) –დან ვღებულობთ $f(n) = n$. შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ $f(n) = n$ მართლაც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

შენიშვნა . (1) უტოლობის მიღება შეიძლება სხვა გზითაც. მაგალითად, თუ $m = n = 2$ მაშინ გვაქვს $4 + f(2) \mid 2f(2) + 2$. ვინაიდან $2f(2) + 2 < 2(f(2) + 4)$ ამიტომ უნდა სრულდებოდეს ტოლობა $2f(2) + 2 = 4 + f(2)$, საიდანაც ვღებულობთ $f(2) = 2$. თუ $m = 2$ მაშინ $4 + f(n) \mid 4 + n$ რაც გვაძლევს $4 + n \ge 4 + f(n)$ ანუ (1) უტოლობას.

პასუხი : $f(n) = n$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $f(n) \le n$;

ბ) მიიღო *შენიშვნაში* მიღებული ტოლობა $f(2) = 2$;

გ) ჩასვა $m = n$ და მიიღო უტოლობა $(n-1)(f(n)-n) \ge 0$;

დ) მიიღო უტოლობა (2);

ე) იპოვა პასუხი ;

ვ) პასუხი შეამოწმა.

შეფასების სქემა

2ქ – ა)

3ქ –ა), ბ)

4ქ – ა), ბ), გ) ან ა), ბ), დ)

5ქ – ა), ბ), გ), დ)

6ქ – ა), ბ), გ), დ), ე)

7ქ – ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

3. იპოვეთ უმცირესი მთელი რიცხვი k, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: თუ მოცემული გვაქვს რიცხვთა ნებისმიერი n–ეული $a_1, a_2, \dots, a_n$, სადაც $0 \le a_i \le 1$, $i = 1,2, \dots, n$ და $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2014$, მაშინ ეს n–ეული შეგვიძლია დავაჯგუფოდ k ცალ ჯგუფად (შესაძლოა ზოგიერთი ჯგუფი იყოს ცარიელი) ისე, რომ თითოეულ ჯგუფში რიცხვთა ჯამი არ აღემატება 1–ს.

ამოხსნა

ვთქვათ m მთელი დადებითი რიცხვია. დავამტკიცოთ შემდეგი წინადადება: ნებისმიერი n–ეული $a_1, a_2, \dots, a_n$, სადაც $0 \le a_i \le 1$, $i = 1,2, \dots, n$ და $a_1 + a_2 + \dots + a_n = m$, შეგვიძლია დავყოთ $2m - 1$ ჯგუფად, ისე რომ თითოეულ ჯგუფში რიცხვთა ჯამი არ აღემატება 1–ს. ვისარგებლოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით n –ის მიმართ. როცა $n \le 2m - 1$ წინადადება ცხადია მართებულია. დავუშვათ წინადადბა მართებულია n– 1–თვის და დავამტკიცოთ n–თვის. თუ $n \ge 2m$ მაშინ ვინაიდან $(a_1 + a_2) + \dots + (a_{2m-1} + a_{2m}) + \dots + a_n = m$ ამიტომ $(a_1 + a_2) + \dots + (a_{2m-1} + a_{2m}) \le m$ და ამიტომ არსებობს ისეთი i , რომ $a_i + a_{i+1} \le 1$. ინდუქციის დაშვების ძალით არსებობს დაჯგუფება შემდეგი $n - 1$ ცალი რიცხვისა $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ ისეთ $2m - 1$ ჯგუფად, რომ თითოეულ ჯგუფში რიცხვთა ჯამი არ აღემატება 1–ს . ცხადია ეს დაჯგუფება ასევე იქნება $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ რიცხვების დაჯგუფება სასურველ ჯგუფებად. წინადადება დამტკიცებულია. ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ $k \le 2m - 1$.

ახლა თუ $n = 2m - 1$ და $a_1 = a_2 = \dots = a_{2m-1} = \frac{m}{2m-1}$ მაშინ $\frac{2m}{2m-1} > 1$. ამიტომ სასურველი დაჯგუფების ყოველი ჯგუფი შეიძლება შეიცავდეს მხოლოდ ერთ რიცხვს $a_1, a_2, \dots, a_{2m-1}$ რიცხვებიდან. ამრიგად $k \ge 2m - 1$. ე.ი. ვღებულობთ $k = 2m - 1$. ჩვენს შემთხვევაში $m = 2014$ და ამიტომ $k = 4027$.

პასუხი: $k = 4027$.

შენიშვნა . $k \le 4027$ შეფასების მიღება შეიძლება სხვა გზითაც. მაგალითად, განვიხილოთ ყველა რიცხვი რომელიც მეტია $\frac{1}{2}$ –ზე და თითოეული მათგანი მოვათავსოთ სხვადასხვა ჯგუფებში. დარჩენილი a_i რიცხვებიდან შევქმანათ ახალი ჯგუფები შემდეგნაირად: ავიღოთ ნებისმიერი რიცხვი , მოვათავსოთ ის რომელიმე ჯგუფში და ამ ჯგუფში ვუმატოთ რიცხვები მანამდე სანამ ჯგუფში რიცხვთა ჯამი არ გახდება მეტი $\frac{1}{2}$ –ზე. ცხადია ეს ჯამი ნაკლებია ან ტოლი 1–ის, ვინაიდან ყოველ ჯერზე ჯგუფში ვათავსებდით რიცხვებს რომლებიც არ აღემატებოდა $\frac{1}{2}$ –ს. გავაგრძელოთ ეს პროცესი სანამ არ ამოვწურავთ ყველა a_i –ს. შევნიშნოთ, რომ ბოლო ჯგუფში შეიძლება ჯამი აღმოჩნდეს $\frac{1}{2}$ –ზე ნაკლები. თუ ბოლო ორ ჯგუფში

რიცხვთა ჯამი ნაკლებია ან ტოლი 1–ზე, ეს ორი ჯგუფი გავაერთიანოდ ერთ ჯგუფად. მივიღებთ d ჯგუფს და თითოეულ ჯგუფში რიცხვთა ჯამი არ აღემატება 1–ს. ამასთან ბოლო ორ ჯგუფში ერთად რიცხვთა ჯამი მეტია 1–ზე, ხოლო ნებისმიერ ჯგუფში დანარჩენი $d-2$ ჯგუფიდან რიცხვთა ჯამი მეტია $\frac{1}{2}$–ზე. ამრიგად გვაქვს $2014 > \frac{d-2}{2} + 1$ ანუ $d < 4028$ და ე.ი. $d \leq 4027$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიხვდა პასუხს;

ბ) მიიღო k–ს ზუსტი შეფასება ქვემოდან;

გ) k–ს ზემოდან შესაფასებლად მიხვდა ინდუქციის გამოყენების საჭიროებას n–ის მიმართ ;

დ) გამოიყენა შენიშვნაში მოცემული პროცედურის მსგავსი მსჯელობა k–ს ზემოდან შესაფასებლად;

ე) მიიღო k–ს ზუსტი შეფასება ზემოდან;

ვ) მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1ქ – ა)

2ქ – ა), ბ)

3ქ – ა) , ბ), გ) ან ა), ბ), დ)

5ქ –ა), გ), ე) ან ა), დ), ე)

7ქ – ა), ბ), გ), ე), ვ) ან ა), ბ), დ), ე), ვ)

4. ვთქვათ n მთელი დადებითი რიცხვია, რომელიც არ იყოფა 3–ზე. მოცემულია n კუნძული, ამასთან ყოველ ორ კუნძულს შორის ან არსებობს მხოლოდ ერთი ხიდი, ან არ არსებობს მათ შორის ხიდი. განვიხილოთ ნებისმიერი $n-2$ კუნძულიანი სიმრავლე. აღმოჩნდა, რომ იმ არსებული ხიდების სრული რაოდენობა, რომლებიც ამ სიმრავლის კუნძულებს ერთმანეთთან აკავშირებს, არის ნულისგან განსხვავებული მუდმივი სიდიდე (ანუ არ არის დამოკიდებული $n-2$ კუნძულიანი სიმრავლის არჩევაზე). დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ორ კუნძულს შორის არის ხიდი.

ამოხსნა.

აღვნიშნოთ k-თი ამოცანის პირობაში მოცემული მუდმივი სიდიდე. რადგანაც $k \neq 0$ ამიტომ ცხადია $n > 2$. არსებული ხიდების სრული რაოდენობა აღვნიშნოთ N –ით. ცხადია, რომ

$$N \leq \frac{n(n-1)}{2}. \qquad (1)$$

ვთქვათ c_{ij} აღნიშნავს i და j კუნძულებს შორის ხიდების რაოდენობას. ამოცანის პირობის თანახმად $c_{ij} \in \{0,1\}$. d_i იყოს i –ური კუნძულიდან გამოსული ხიდების რაოდენობა. ცხადია $\sum_{1\leq i\leq n} d_i = 2N$ და $\sum_{1\leq i<j\leq n} c_{ij} = N$. იმ ხიდების საერთო რაოდენობა, რომლებიც გამოდიან ან i ან j კუნძულებიდან ტოლია $d_i + d_j - c_{ij}$. მაშინ ამოცანის პირობა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად $k = N - d_i - d_j + c_{ij}$. თუ ამ ტოლობებს დავწერთ $\{1,2,\dots,n\}$ სიმრავლის ყოველი ორ ელემენტიანი ქვესიმრავლისთვის და შემდეგ შევკრებთ , მივიღებთ $C_n^2 k = C_n^2 N - 2(n-1)N + N$. გადავწეროთ ეს ტოლობა შემდეგნაირად

$$n(n-1)K = (n-2)(n-3)N. \qquad (2)$$

რადგანაც $n > 2$ და არ იყოფა 3–ზე, ამიტომ ცხადია, რომ $n(n-1)$ და $(n-2)(n-3)$ ორივე არანულოვანი ლუწი რიცხვია. შევნიშნოთ ასევე, რომ $n(n-1)$ და $(n-2)(n-3)$ რიცხვების საერთო გამყოფი, რომელიც მეტია 2–ზე შეიძლება იყოს მხოლოდ 3. ამასთან 3 არის $n(n-1)$ და $(n-2)(n-3)$ რიცხვების საერთო გამყოფი მაშინ და მარტო მაშინ როცა $3 \mid n$. ჩვენს შემთხვევაში n არ იყოფა 3–ზე, ამიტომ $\frac{n(n-1)}{2}$ და $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ თანამარტივი რიცხვებია. ამის გათვალისწინებით (2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{n(n-1)}{2} \mid N$ და რადგან $N \neq 0$, ე. ი. $\frac{n(n-1)}{2} \leq N$, ეს კი (1) უტოლობის გათვალისწინებით გვაძლევს ტოლობას $N = \frac{n(n-1)}{2}$. რაც ცხადია ნიშნავს იმას, რომ ყოველი კუნძული დაკავშირებულია ყველა სხვა კუნძულთან. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

შენიშვნა . ამოცანა მართებულია მაშინაც, როცა n იყოფა სამზე.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა ტოლობები $k = d_i + d_j - c_{ij}$ და შეკრიბა;

ბ) მიიღო განტოლება (2);

გ) შენიშნა, რომ $n(n-1)$ და $(n-2)(n-3)$ რიცხვების საერთო გამყოფთა სიმრავლე შეიძლება იყოს მხოლოდ $\{1,2,3\}$;

დ) შენიშნა, რომ $\gcd\big(n(n-1)\,,(n-2)(n-3)\big) = 1$.

ე) დაადგინა , რომ $\frac{n(n-1)}{2} \mid N$

ვ) მიიღო ტოლობა $N = \frac{n(n-1)}{2}$ და გააკეთა დასკვნა;

შეფასების სქემა

1ქ – ა)

3ქ – ა), ბ)

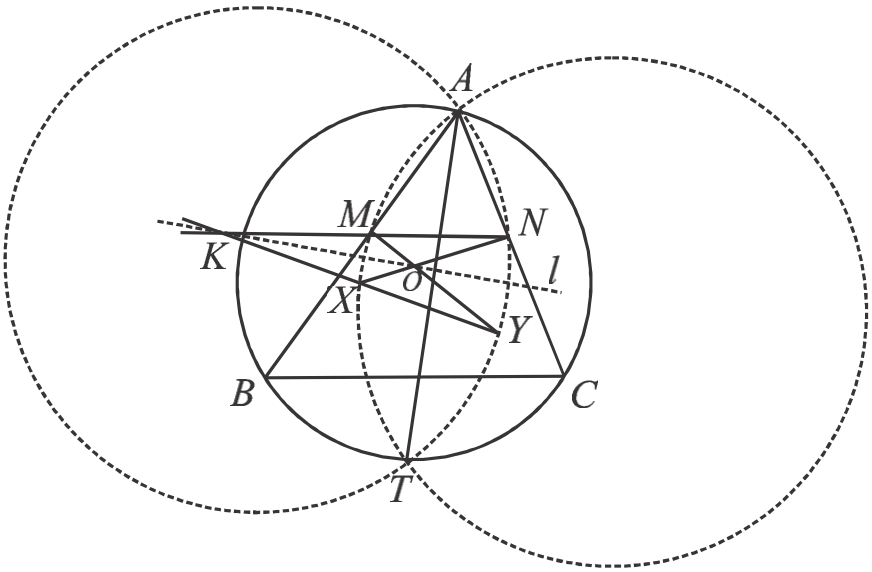
5ქ – ა) , ბ), გ) ან ა), ბ), დ)

6ქ –ა), ბ), გ), ე) ან ა), ბ), დ), ე)

7ქ – ა), ბ), გ), ე), ვ) ან ა), ბ), დ), ე), ვ)

5. ვთქვათ ω არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი. AB და AC გვერდების შუაწერტილებია შესაბამისად M და N წერტილები, ხოლო T არის ω წრეწირის იმ BC რკალის შუაწერტილი, რომელიც არ შეიცავს A წერტილს. AMT სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი AC გვერდის შუამართობს კვეთს X წერტილში, ხოლო ANT სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი AB გვერდის შუამართობს კვეთს Y წერტილში, ამასთან X და Y წერტილები მდებარეობს ABC სამკუთხედის შიგნით. ვთქვათ XY და MN წრფეები იკვეთება K წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $KA = KT$.

ამოხსნა



ვთქვათ, O არის ω წრეწირის ცენტრი. მაშინ $O = MY \bigcap NX$. ვთქვათ l არის AT მონაკვეთის შუამართობი. ცხადია, რომ l წრფე გაივლის O წერტილზე. განვიხილოთ ღერძული სიმეტრია l წრფის მიმართ. შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან AT არის BAC კუთხის ბისექტრისა, ამიტომ l ღერძის მიმართ AB წრფის სიმეტრიული წრფე იქნება AC წრფის პარალელური. ასევე, l ღერძის მიმართ OM წრფის სიმეტრიული წრფე იქნება ON წრფის პარალელური და ამავე დროს გაივლის O წერტილზე, ასე, რომ დაემთხვევა ON წრფეს. ვინაიდან AMT სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი სიმეტრიულია თავისი თავის l ღერძის მიმართ, ამიტომ M წერტილის სიმეტრიული წერტილი l ღერძის მიმართ უნდა მდებარეობდეს ერთი მხრივ AMT რკალზე, მეორე მხრივ კი ON წრფეზე. ასეთი წერტილი კი არის X . მაშასადამე M წერტილის სიმეტრიული წერტილი l ღერძის მიმართ არის X წერტილი. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ N წერტილის სიმეტრიული წერტილი l ღერძის მიმართ არის Y წერტილი. მაშინ ვასკვნით, რომ l ღერძის მიმართ MN წრფის სიმეტრიული წრფე იქნება XY წრფე, შესაბამისად ამ წრფეების თანაკვეთის წერტილი K მდებარეობს l წრფეზე, ამიტომ $KA = KT$. დამტკიცება დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გაავლო l წრფე და აღნიშნა, რომ გაივლის O წერტილზე;

ბ) დაადგინა, რომ l ღერძის მიმართ AB წრფის სიმეტრიული წრფე იქნება AC წრფის პარალელური;

გ) დაადგინა, რომ l ღერძის მიმართ OM წრფის სიმეტრიული წრფე დაემთხვევა ON წრფეს;

დ) აღნიშნა, რომ AMT სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი სიმეტრიულია თავისი თავის l ღერძის მიმართ;

ე) დაადგინა, რომ M წერტილის სიმეტრიული წერტილი l ღერძის მიმართ არის X და N წერტილის სიმეტრიული წერტილი l ღერძის მიმართ არის Y ;

ვ) აღნიშნა,რომ l ღერძის მიმართ MN წრფის სიმეტრიული წრფე იქნება XY წრფე;

ზ) დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა) , ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

6. ვთქვათ R არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. იპოვეთ ყველა $f: R \to R$ ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$(f(x)-f(y))(u-v)=(f(u)-f(v))(x-y)$$

განტოლებას ყველა იმ x, y, u, v ნამდვილი რიცხვებისთვის, რომლებისთვისაც სრულდება პირობა $x+y=u+v$.

ამოხსნა

ვთქვათ $x+y=u+v=2c$, $x-y=2a$ და $u-v=2b$. მაშინ ყოველი $a,b,c \in R$ რიცხვებისთვის მოცემული განტოლება შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$(f(c+a)-f(c-a))b=(f(c+b)-f(c-b))a. \qquad \forall a,b,c \in R \tag{1}$$

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $f: R \to R$ ფუნქციისთვის $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ ფუნქცია არის ლუწი, ხოლო $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ არის კენტი. ამავე დროს თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f(x)=g(x)+h(x)$, მაშინ შეგვიძლია (1) ასე ჩავწეროთ:

$$(g(c+a)-g(c-a))b+(h(c+a)-h(c-a))b=(g(c+b)-g(c-b))a+(h(c+b)-h(c-b))a \ .$$

თუ მიღებულ ტოლობაში c–ს მაგივრად ჩავსვამთ $-c$ და გავითვალისწინებთ, რომ g არის ლუწი, ხოლო h არის კენტი ფუნქცია, გვექნება:

$$(g(c-a)-g(c+a))b+(h(c+a)-h(c-a))b=(g(c-b)-g(c+b))a+(h(c+b)-h(c-b))a \ .$$

მიღებული ბოლო ორი ტოლობის შეკრებით ჩვენ დავინახავთ, რომ h ფუნქცია აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, ხოლო ბოლო ორი ტოლობის გამოკლებით დავინახავთ, რომ g ფუნქციაც აკმაყოფილებს (1) განტოლებას.

ახლა ჩვენი მიზანია ვიპოვთ ყველა კენტი და ყველა ლუწი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. ჯერ დავუშვათ, რომ h არის კენტი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. ავიღოთ $c=0$ და $b=1$, მაშინ (1)–დან მივიღებთ $2h(a)=2h(1)a$, ანუ $h(x)=\beta x$ ყველა ნამდვილი x რიცხვისთვის.

ახლა ვთქვათ g არის ლუწი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. ავიღოთ $b=c$, მაშინ (1)–დან მივიღებთ

$$(g(c+a)-g(c-a))c=(g(2c)-g(0))a, \ \ \forall a,c \in R. \tag{2}$$

თუ მიღებულ ტოლობაში a–ს და c–ს ადგილებს შევუცვლით, გვექნება

$$(g(c+a)-g(c-a))a=(g(2a)-g(0))c\,,\quad \forall a,c\in R\,. \qquad (3)$$

თუ (2) ტოლობას გავამრავლებთ a–ზე, ხოლო (3) ტოლობას c–ზე, მივიღებთ

$$(g(2c)-g(0))a^2=(g(2a)-g(0))c^2\,.$$

თუ მიღებულ ტოლობაში ჩავსვათ $c=\frac{x}{2}$ და $a=1$, მივიღებთ $g(x)=\frac{g(2)-g(0)}{4}x^2+g(0)=\alpha x^2+\gamma$.

ამრიგად საძიებელ f ფუნქციას უნდა ჰქონდეს $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ სახე, სადაც α,β,γ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. შემოწმება გვიჩვენებს, რომ ამ სახის ნებისმიერი ფუნქცია აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო (1) ტოლობა;
ბ) განიხილა წარმოდგენა $f(x)=g(x)+h(x)$;
გ) ჩაწერა (1) ტოლობა h და g ფუნქციებით და c–ს მაგივრად ჩასვა $-c$.
დ) დაადგინა, რომ h და g ფუნქციები აკმაყოფილებს (1) განტოლებას;
ე) დაადგინა, რომ $h(x)=\beta x$ ყველა ნამდვილი x რიცხვისთვის;
ვ) დაადგინა, რომ $g(x)=\alpha x^2+\gamma$
ზ) დაადგინა, რომ $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ და შეამოწმა.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა) , ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ) და ე) ან ვ)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)